1 Determinaty

Definice 1.1. Nechť $\mathbf{M}$ je konečná množina. Permutací množiny $\mathbf{M}$ nazveme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{M}$.

Často se uvažuje konečná množina $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$, pak se permutace p zapisuje jako

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

kde čísla $a_i \in \mathbf{M}$ a pro všechna $i \in \mathbf{M}$ platí $p(i) = a_i$, tj. obrazem čísla $i \in \mathbf{M}$ je číslo $a_i \in \mathbf{M}$. Vzhledem k tomu, že první řádek v předchozím schematu je vždy stejný, stačí permuatci zapsat pomocí druhého řádku jako

$$p = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Jde tedy o zápis pořadí čísel z konečné množiny $\mathbf{M}$. Takových pořadí je $n!$.

Definice 1.2. Uspořádaná dvojice (a_i, a_j) se nazývá inverze v permutaci $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, jestliže $i < j$ a zároveň $a_i > a_j$. Označíme-li $|p|$ počet všech inverzí v permutaci p, pak se číslo

$$\operatorname{sign} p = (-1)^{|p|}$$

nazývá znaménko permutace p. Je-li sign $p = 1$, jedná se o sudou permutaci, je-li sign $p = -1$ jedná se o permutaci lichou.

Věta 1.1. *sign* $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots a_n) = -$*sign* $(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots a_n)$.

Definice 1.3. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Determinant matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_p \operatorname{sign} p \; a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n},$$

kde sčítáme přes všech $n!$ permutací $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ indexové množiny sloupců $\{1, 2, \ldots n\}$. Kromě označení det $\mathbf{A}$ se také používá $|\mathbf{A}|$. Řád determinantu je shodný s řádem matice.

- Všimněme si, že v každém součinu $a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$ se nachází právě jedno číslo z každého řádku i každého sloupce matice $\mathbf{A}$.
- Jedná se tedy o součet $n!$ čísel, které vzniknou jako součin prvků matice $\mathbf{A}$. V každém součinu se vyskytuje právě jedno číslo z každého řádku i z každého sloupce matice.
- Determinant matice, která není čtvercová není definován.
- Bude ukázán výpočet determinantu řádu 2 a 3 a vysvětleno Sarrusovo pravidlo.

Věta 1.2. *Determinat horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na její hlavní diagonále, tj*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Totéž platí pro dolní trojúhelníkovou matici.

Věta 1.3. *Determinanty navzájem transponovaných matic si jsou rovny, tj.*

$$\mathit{det}\, \mathbf{A}^\top = \mathit{det}\, \mathbf{A}$$

Věta 1.4. *(***Řádkové úpravy a determinant.***) Nechť* $\mathbf{B}$ *je matice, která vznikla z čtvercové matice* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *řádu* n *některou z následujících řádkových operací*

typ I	*výměna řádku i a j,*
typ II	*násobek řádku i číslem $\alpha \neq 0$,*
typ III	*přičtení α násobku řádku i k řádku j.*

Pak pro determinat matice $\mathbf{B}$ *platí*

- *det* $\mathbf{B} = -$*det* $\mathbf{A}$ *pro typ I,*
- *det* $\mathbf{B} = \alpha$ *det* $\mathbf{A}$ *pro typ II,*
- *det* $\mathbf{B} =$ *det* $\mathbf{A}$ *pro typ III.*

Věta 1.5. Důsledek *Determinant matice, která má dva stejné řádky, je roven nule.*

- Budou ukázány výpočty některých determinantů.

Věta 1.6. O násobení determinantů. *Pro všechny čtvercové matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *řádu n platí*

$$det\ (\mathbf{AB}) = det\ \mathbf{A}\ det\ \mathbf{B}.$$

- Z toho plyne, že

$$\det\ \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

Věta 1.7. O rozvoji determinantu podle $i-$ tého řádku. *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je matice řádu $n > 1$. Pak pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je*

$$det\ \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, det\ \mathbf{A}_{ij},$$

kde $\mathbf{A}_{ij}$ *je matice řádu $n-1$, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *vypuštěním jejího $i-$ tého řádku a $j-$ tého sloupce.*

- Determinant, který vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním jednoho řádku a jednoho sloupce, se nyzývá *subdeterminant* nebo *minor* matice $\mathbf{A}$. Číslo $D_{ij} = (-1)^{i+j}\det\ \mathbf{A}_{ij}$ se nazývá algebraický doplněk k prvku $a_{ij.}$ Rozvoj determinantu pak můžeme psát jako

$$\det\ \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}.$$

Věta 1.8. Pomocná větička *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice řádu n a nechť D_{ij} jsou algebraické doplňky prvku a_{ij} pro $j \in \{1, 2, \ldots n\}$, pak*

$$a_{j1}D_{i1} + a_{j2}D_{i2} + \cdots + a_{jn}D_{in} = \begin{cases} det\ \mathbf{A}, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

- Matice doplňků je matice

$$\text{adj}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2n} \\ . & . & . & . \\ D_{n1} & D_{n2} & \ldots & D_{nn} \end{pmatrix}^{\top}$$

Věta 1.9. O inverzní matici *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice řádu n, pro kterou det* $\mathbf{A} \neq 0$, *pak*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\ \mathbf{A}}{det\ \mathbf{A}}$$

Věta 1.10. Cramerovo pravidlo. *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice řádu n, pro kterou det* $\mathbf{A} \neq 0$ *a nechť*

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

je soustava rovnic. Pak pro $i-$ tou neznnámou x_i pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$x_i = \frac{det\ \mathbf{A}_i}{det\ \mathbf{A}},$$

kde $\mathbf{A}_i$ *je matice, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahrazením $i-$ tého sloupce sloupcem $\vec{b}$.*